1 | Jetzt wechseln!

Sei $V := \{(x \quad y \quad z)^T \in \mathbb{R}^3 \mid x + y + z = 0\}$, $W := \mathbb{R}^2$. Die folgenden Tupel B und B' bzw. C und C' sind jeweils geordnete Basen von V bzw. W:

$$B := \left(\begin{pmatrix}1\\-1\\0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0\\1\\-1\end{pmatrix}\right) \quad C := \left(\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix}\right)$$

$$B' := \left(\begin{pmatrix}1\\0\\-1\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0\\1\\-1\end{pmatrix}\right) \quad C' := \left(\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}-2\\1\end{pmatrix}\right)$$

Sei $f\colon V \to W$ die lineare Abbildung, die bezüglich der Basen B und C gegeben ist durch die Matrix

$$_CM_B(f) = \begin{pmatrix}-1 & 1\\ 3 & -2\end{pmatrix}.$$

Welche Darstellung hat f bezüglich der Basen B' und C'?

SCHRITT 1:

$$\begin{tikzcd}
\mathbb{R}^2 \arrow[rrr, "\begin{pmatrix}-1 & 1\\ 3 & -2\end{pmatrix}"] \arrow[d, swap, "\begin{pmatrix}1&0\\-1&1\\0&-1\end{pmatrix}=B"] \arrow[dr, "\cong\ \varphi_B"] & & & \mathbb{R}^2 \arrow[dl, swap, "\cong\ C=\begin{pmatrix}1&0\\0&1\end{pmatrix}"] \\
\mathbb{R}^3 \supseteq & V \arrow[r] & W & \\
\mathbb{R}^2 \arrow[u, "\begin{pmatrix}1&0\\0&1\\-1&-1\end{pmatrix}=B'"] \arrow[ur, swap, "\cong\ \varphi_{B'}"] \arrow[rrr, dashed, swap, "{_{C'}M_{B'}(f)}"] & & & \mathbb{R}^2 \arrow[ul, "\cong\ C'=\begin{pmatrix}1&-2\\0&1\end{pmatrix}"]
\end{tikzcd}$$

SCHRITT 2:

Linksinverses L_B zu B:

$$\left(\begin{array}{cc|ccc} 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \quad +$$

$$\left(\begin{array}{cc|ccc} 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \quad +$$

$$\left(\begin{array}{cc|ccc} 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 1 \end{array}\right)$$

$L_B := \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$ ist also ein Linksinverses zu B.

Linksinverses $L_{C'}$ zu C':

$$\left(\begin{array}{cc|cc} 1 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \end{array}\right) \quad +2$$

$$\left(\begin{array}{cc|cc} 1 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \end{array}\right)$$

$L_{C'} := \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ ist also ein Linksinverses zu C'!

SCHRITT 3:

$$ {}_{C'}M_{B'}(f) = L_{C'} \cdot C \cdot {}_{C}M_{B}(f) \cdot L_B \cdot B' $$

$$ = \underbrace{\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}} \cdot \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 3 & -2 \end{pmatrix} \cdot \underbrace{\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ -1 & -1 \end{pmatrix}} $$

$$ = \underbrace{\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 3 & -2 \end{pmatrix}} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} $$

$$ = \begin{pmatrix} 5 & -3 \\ 3 & -2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} $$

$$ = \begin{pmatrix} 2 & -3 \\ 1 & -2 \end{pmatrix} $$

-0,5 P je Rechenfehler

-2 P je konzeptionellem Fehler
(z.B. 3x3-Matrix für L_B)

0 P bei falscher Transformations-formel

2 | Mühsame Wendung

Gegeben seien die folgenden reellen Matrizen mit Parametern $a, b, c, d \in \mathbb{R}$:

$$A := \begin{pmatrix} 0 & a \\ 1 & -1 \end{pmatrix} \quad B := \begin{pmatrix} b & -b \\ b & b \end{pmatrix} \quad C := \begin{pmatrix} c & 1 & 4 \\ 2 & 2 & c \\ 1 & c & 3c-7 \end{pmatrix}$$

(a) Bestimmen Sie jeweils alle reellen Werte von a, b und c, für die die Matrizen invertierbar sind.

(b) Berechnen Sie die inversen Matrizen A^{-1} und B^{-1} für alle Werte von a und b, für die sie existieren. Berechnen Sie C^{-1} im Fall $c = 0$.

(c) Bestimmen Sie allgemein die Determinanten von A, B und C.

A:
$$\left(\begin{array}{cc|cc} 0 & a & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 0 & 1 \end{array}\right)$$

$$\left(\begin{array}{cc|cc} 1 & -1 & 0 & 1 \\ 0 & a & 1 & 0 \end{array}\right)$$

Falls $a = 0$: Zeilennormalform erreicht, A nicht invertierbar

Falls $a \neq 0$:
$$\left(\begin{array}{cc|cc} 1 & -1 & 0 & 1 \\ 0 & a & 1 & 0 \end{array}\right) \;\Big|\cdot \tfrac{1}{a}$$

$$\left(\begin{array}{cc|cc} 1 & -1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1/a & 0 \end{array}\right) \; +$$

$$\left(\begin{array}{cc|cc} 1 & 0 & 1/a & 1 \\ 0 & 1 & 1/a & 0 \end{array}\right)$$

A invertierbar,

$$A^{-1} = \begin{pmatrix} 1/a & 1 \\ 1/a & 0 \end{pmatrix}$$

$\det A = -a$

1 P für A invertierbar $\Leftrightarrow a \neq 0$

1 P für A^{-1}

1 P für $\det A$

B:
$$\left(\begin{array}{cc|cc} b & -b & 1 & 0 \\ b & b & 0 & 1 \end{array}\right)$$

Fall $b=0$: $B = 0$; nicht invertierbar

Falls $b \neq 0$:

$$\left(\begin{array}{cc|cc} b & -b & 1 & 0 \\ b & b & 0 & 1 \end{array}\right) \begin{array}{l} | \cdot \frac{1}{b} \\ | \cdot \frac{1}{b} \end{array}$$

$$\left(\begin{array}{cc|cc} 1 & -1 & \frac{1}{b} & 0 \\ 1 & 1 & 0 & \frac{1}{b} \end{array}\right) \; -$$

$$\left(\begin{array}{cc|cc} 1 & -1 & \frac{1}{b} & 0 \\ 0 & 2 & -\frac{1}{b} & \frac{1}{b} \end{array}\right) \begin{array}{l} \\ \cdot \frac{1}{2} \end{array}$$

$$\left(\begin{array}{cc|cc} 1 & -1 & \frac{1}{b} & 0 \\ 0 & 1 & -\frac{1}{2b} & \frac{1}{2b} \end{array}\right) \; +$$

$$\left(\begin{array}{cc|cc} 1 & 0 & \frac{1}{2b} & \frac{1}{2b} \\ 0 & 1 & -\frac{1}{2b} & \frac{1}{2b} \end{array}\right)$$

B invertierbar,
$$B^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{1}{2b} & \frac{1}{2b} \\ -\frac{1}{2b} & \frac{1}{2b} \end{pmatrix}$$

$$\det B = 2b^2$$

$$\det B^{-1} = \frac{1}{(2b)^2} - \left(-\frac{1}{(2b)^2}\right) = \frac{2}{(2b)^2} = \frac{1}{2b^2}$$

1 P für B invertierbar $\Leftrightarrow b \neq 0$
1 P für B^{-1}
1 P für $\det B$

$$C: \left(\begin{array}{ccc|ccc} c & 1 & 4 & 1 & 0 & 0 \\ 2 & 2 & c & 0 & 1 & 0 \\ 1 & c & 3c-7 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right)$$

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & c & 3c-7 & 0 & 0 & 1 \\ 2 & 2 & c & 0 & 1 & 0 \\ c & 1 & 4 & 1 & 0 & 0 \end{array}\right) \begin{array}{l} \\ -2 \\ -c \end{array}$$

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & c & 3c-7 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 2(1-c) & -5c+14 & 0 & 1 & -2 \\ 0 & (1+c)(1-c) & -3c^2+7c+4 & 1 & 0 & -c \end{array}\right)$$

Falls $c = 1$:

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 1 & -4 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & \dots & 0 & 1 & -2 \\ \underbrace{0 \quad\quad 0}_{} & & \dots & 1 & 0 & -c \end{array}\right)$$

linear abhängige Spalten also
Rang $(C) < 3$, also
C nicht invertierbar

Falls $c \neq 1$:

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & c & 3c-7 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 2(1-c) & -5c+14 & 0 & 1 & -2 \\ 0 & (1+c)(1-c) & -3c^2+7c+4 & 1 & 0 & -c \end{array}\right) \begin{array}{l} \\ \vert \cdot \frac{1}{2(1-c)} \\ \vert \cdot \frac{1}{1-c} \end{array}$$

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & c & 3c-7 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & \frac{-5c+14}{2(1-c)} & 0 & \frac{1}{2(1-c)} & \frac{-1}{1-c} \\ 0 & 1+c & \frac{-3c^2+7c+4}{1-c} & \frac{1}{1-c} & 0 & \frac{-c}{1-c} \end{array}\right) \begin{array}{l} \\ \\ -(1+c) \end{array}$$

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & c & 3c-7 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & \frac{-5c+14}{2(1-c)} & 0 & \frac{1}{2(1-c)} & \frac{-1}{1-c} \\ 0 & 0 & x & \frac{1}{1-c} & \frac{-(1+c)}{2(1-c)} & \frac{1}{1-c} \end{array}\right)$$

$$\text{mit } x = \frac{2(-3c^2+7c+4) + (1+c)(5c-14)}{2(1-c)}$$

$$= \frac{-6c^2+14c+8+5c-14+5c^2-14c}{2(1-c)}$$

$$= \frac{-c^2+5c-6}{2(1-c)}$$

$$= \frac{-(c-2)(c-3)}{2(1-c)} \qquad -\frac{6}{2}$$

Falls $c=2$ oder $c=3$:

Nullzeile, also $\operatorname{Rang}(C)<3$, also C nicht invertierbar.

Falls $c \notin \{1,2,3\}$:

C invertierbar

Inverses von C für $c=0$:

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & -7 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 7 & 0 & \frac{1}{2} & -1 \\ 0 & 0 & -3 & 1 & -\frac{1}{2} & 1 \end{array}\right) \quad \Big| \cdot -\tfrac{1}{3}$$

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & -7 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 7 & 0 & \frac{1}{2} & -1 \\ 0 & 0 & 1 & -\frac{1}{3} & \frac{1}{6} & -\frac{1}{3} \end{array}\right) \quad -7 \quad +7$$

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & -\frac{7}{3} & \frac{7}{6} & -\frac{4}{3} \\ 0 & 1 & 0 & \frac{7}{3} & -\frac{2}{3} & \frac{4}{3} \\ 0 & 0 & 1 & -\frac{1}{3} & \frac{1}{6} & -\frac{1}{3} \end{array}\right)$$

In diesem Fall ist also

$$C^{-1} = \begin{pmatrix} -7/3 & 7/6 & -4/3 \\ 7/3 & -2/3 & 4/3 \\ -1/3 & 1/6 & -1/3 \end{pmatrix}$$

Im Allgemeinen ist

$$\det C = 2c(3c-7) + c + 8c - 8 - 2(3c-7) - c^3$$

$$= \underline{6c^2} \boxed{-14c} \boxed{+c} \boxed{+8c} - 8 \boxed{-6c} + 14 \underline{-c^3}$$

$$= -c^3 + 6c^2 - 11c + 6$$

$$\left(= -(c-1)(c-2)(c-3) \quad \text{optional} \right)$$

2 P für C invertierbar $\Leftrightarrow$ $c \in \mathbb{R} \setminus \{1,2,3\}$

1 P für C^{-1} (mit $c=0$)

1 P für $\det C$